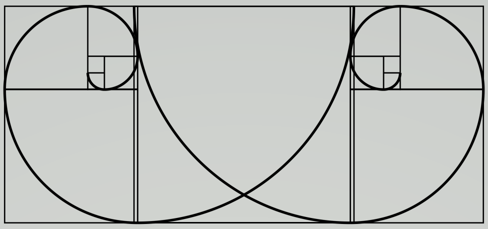
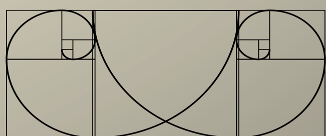
Fibonacci



Den mest talentfulde vestlige matematikker i middelalderen

Indhold



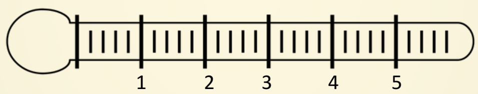
Matematik kan bruges til mange praktiske ting. Det er derfor en naturlig grund til at beskæftige sig med matematik. Men matematik rummer også en skønhed, som vi kan genfinde i naturen.
Mange mønstre i naturen er kendetegnet ved at være regelmæssige former. Disse mønstre gentages i forskellige sammenhænge og kan undertiden modelleres matematisk .

På den måde anvendes flere af de matematiske kompetencer i dette forløb.

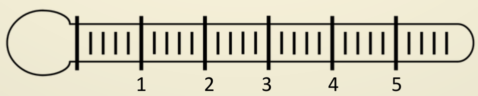
Overordnede læringsmål:

Førevaluering

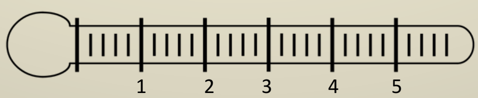
At se matematik i en historisk sammenhæng



At kunne genkende den matematiske model som fibonacci repræsenteret i naturen



At kunne lave en repræsentation af fibonaccis talrække på flere måder



Fibonacci og matematikkens vilkår i Middelalderen

Leonardo da Pisa

kaldet **Leonardo Fibonacci**
eller simpelt hen bare **Fibonacci**,

ca. 1170 – ca. 1250

Leonardo Pisano blev født i Italien. Men han er opvokset rundt om i Nordafrika, hvor hans far, Guilielmo, rejste rundt som repræsentant for Republikken Pisas købmænd. Det var på disse rejser Fibonacci lærte om arabisk matematik.
Da han vendte tilbage til Italien, formidlede han denne viden ud i hele Europa.

Fibonacci er dog bedst kendt for sin introduktion af en bestemt talesekvens, som siden er blevet kendt som Fibonacci-tallene eller Fibonacci Sekvensen.

Fibonacci-tallene fik dog først deres navn i 1800-tallet af den fransk matematikker Edouard Lucas.

Undersøg hvilke vilkår matematik og naturvidenskab havde i Europa i Middelalderen.
Skriv notater eller stikord.

Repræsentation - En talrække

Matematisk bliver Fibonacci-tallene defineret ved:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

hvor

$$F_0 = 0, \; F_1 = 1$$

Det betyder, at …

0, 1, . .

0, 1, 1 (0+1), . . .

0, 1, 1, 2 (1+1),. . .

0, 1, 1, 2, 3 (1+2), . . .

0, 1, 1, 2, 3, 5 (2+3),. . .

Hvor mange led af fibonacci-tallene kan du lave?

Sammenlign gerne dine tal med kammeraternes.

0 , 1 , 1 , 2 , 3 , 5 ,

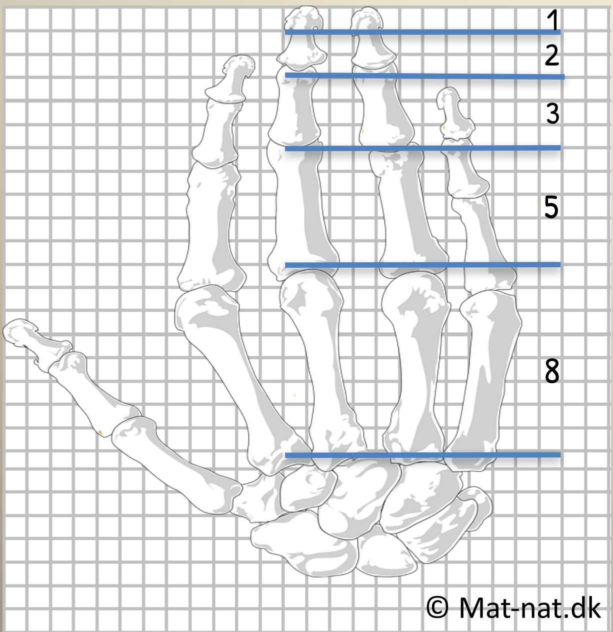
8 , _____ , _____ , _____ , _____ ,

_____ , _____ , _____ , _____ ,

_____ , _____ , _____ , _____ ,

_____ , _____ , _____ ,

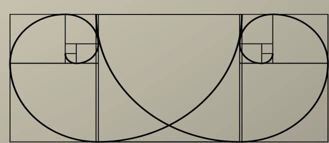
_____ , _____ , _____ ,



_____

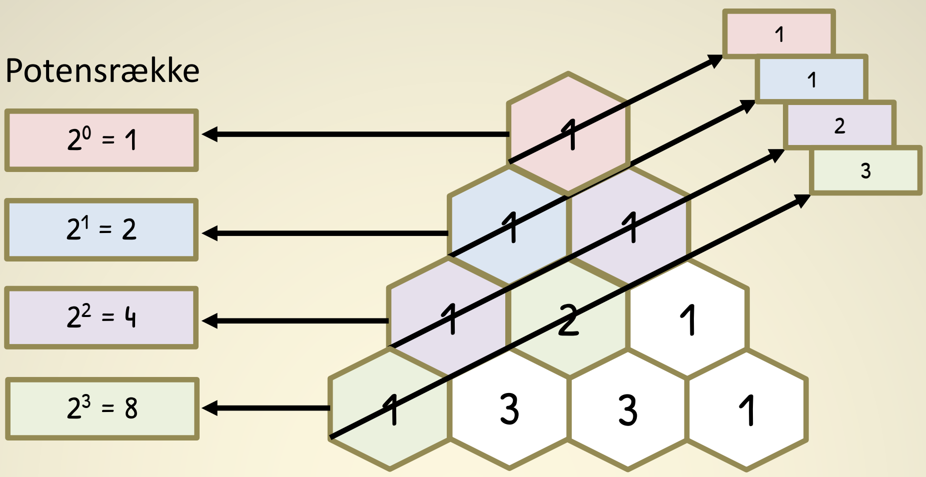
Hvor langt kan du fortsætte?
Tag gerne et stykke papir at fortsætte på.

Fibonacci-tallene genfindes flere steder i vores krop. Blandt andet i knoglelængden i vores fingre.



Fibonaccitallene kan også fremkomme ved denne repræsentationsform:

Som en pyramide hvor de enkelte elementer er resultatet af summen af de to ovenstående tal. Fibonaccitallene fremkommer som summen af diagonalerne.



Pyramiden kaldes også for **Pascals trekant.**


Balise Pascal

Den har navn efter den franske matematiker 1623-1665 Balise Pascal.

Pascals trekant kan, på trods af en meget simpel konstruktionsform, visualisere adskillige matematiske begreber.

Summen af tallene i hver række er lig med 2 opløftet i rækkenumrets potens 2^n

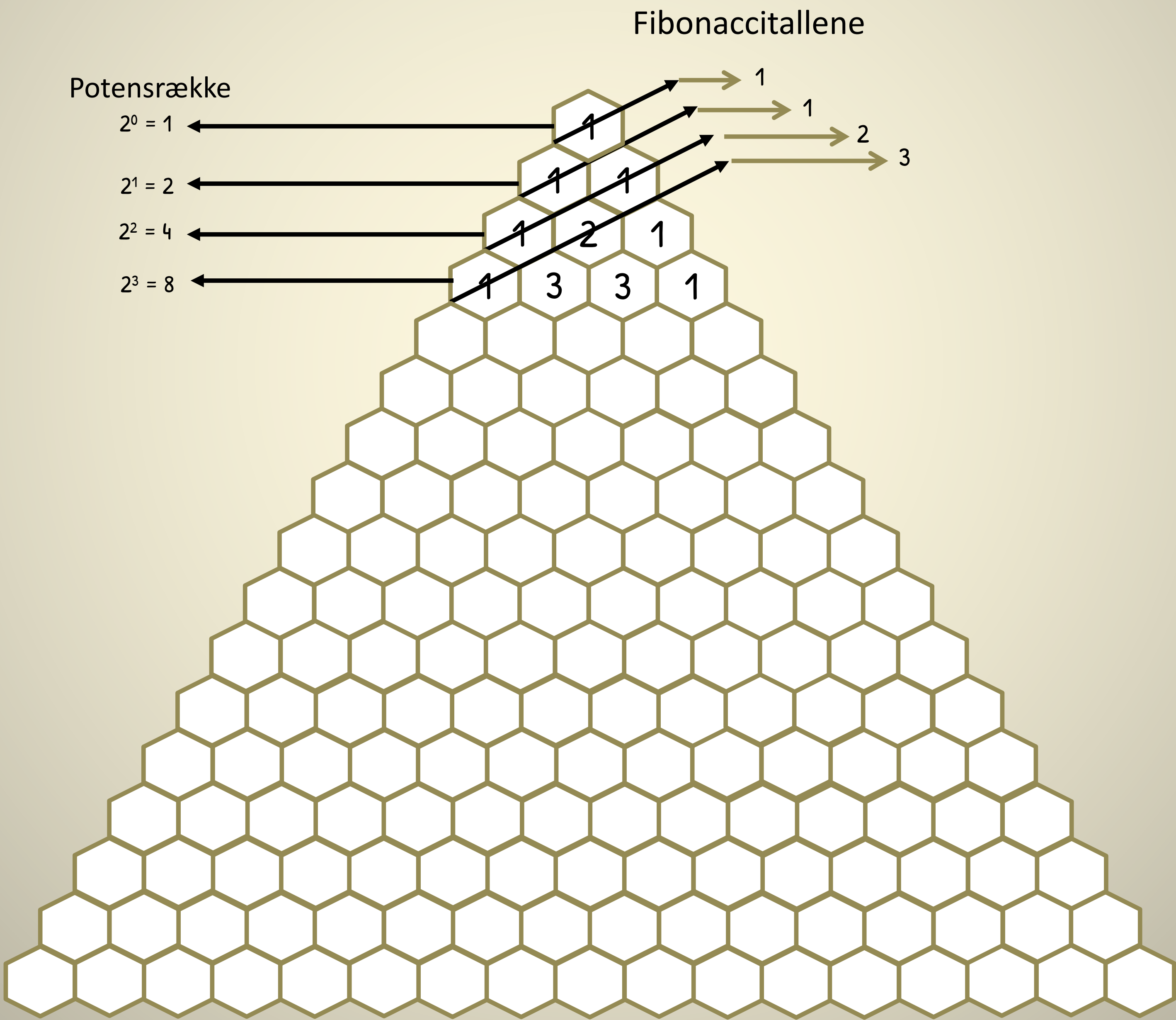
- Eksempelvis række 3 (grøn): $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

Hvis man farvelægges tallene i trekanten efter om de er lige eller ulige, så vil der fremkomme en fraktal, der hedder den Fraktale Sierpinki-trekant.

Udfyld Pascals trekant.

Find såvel Fibonaccitallene (diagonaler) og Potensrækken (rækker).

Farvelæg de ulige tal – og find den Fraktale Sierpinki-trekant.



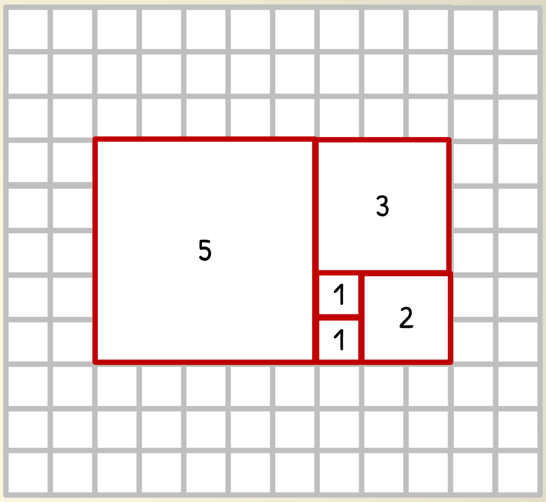
Nu har vi arbejdet to forskellige repræsentationer, der har taget udgangspunkt i formalistisk talbehandling. Vi kan anvende tal, systemer og formler til at beskrive Fibonacci-tallene

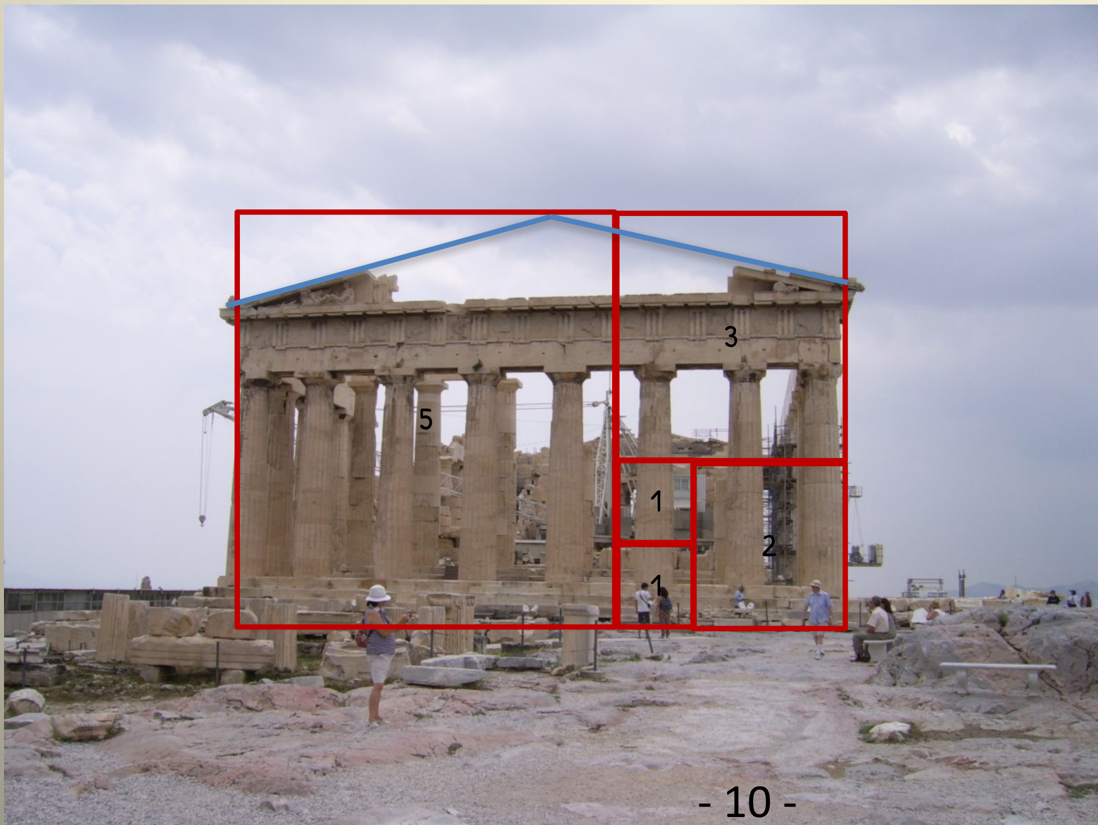
Fibonacci-tallene kan også fremkomme ved geometrisk repræsentationsform:

Som siderne af kvadrater, der meget illustrativt giver Fibonacci-tallene.

Fibonacci-tallene illustreret ved kvadrater, hvor sidelængderne danner fibonacci's talrække, bliver ofte brugt i arkitekturen.

Eksempelvis kan Parthenon på Akropolis i Grækenland indskrives i rektanglet givet ved Fibonacci-tallene. Læg mærke til antallet af søjler i hver kvadrat.

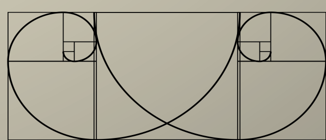




Repræsentation – Kvadrater (fortsat)

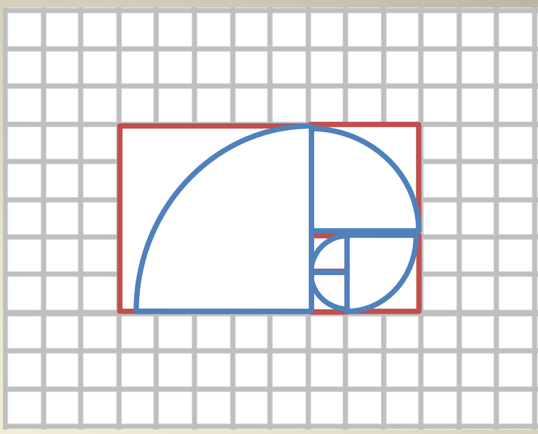
Illustrer Fibonacci-tallene som sider af kvadrater på samme måde som på foregående side. Planlæg nøje, hvor det første kvadrat skal placeres.

Tag midtersiderne ud af et kvadreret kladdehæfte størrelse A4. Derved fås et kvardreret papir størrelse A3. Hvad er den største sidelængde på fibonacci-kvadrater man kan opnå? Brug et tern son en enhed.



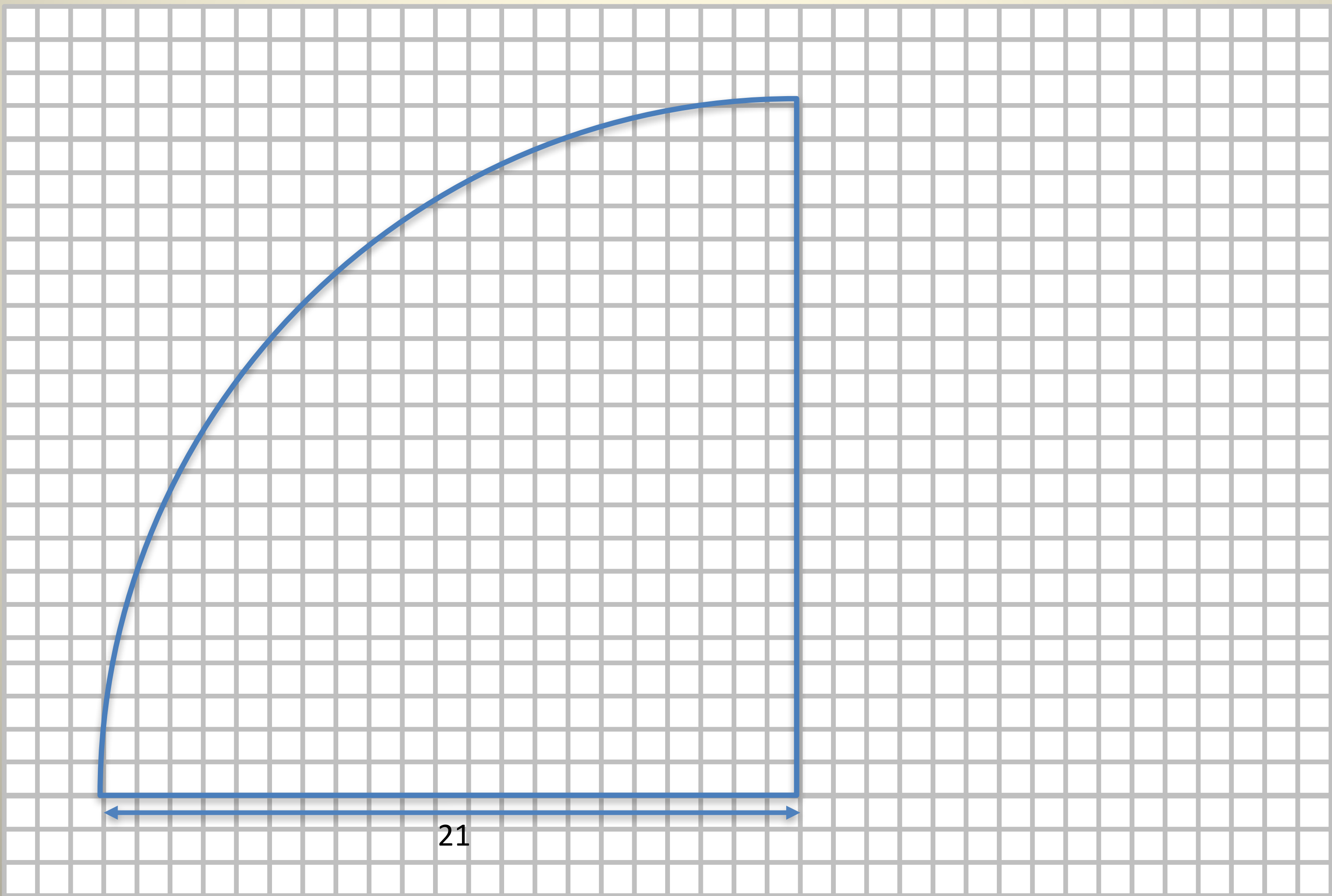
Repræsentation – Fibonacci-spiral

Fibonacci-tallene kan altså illustreres ved kvadrater, hvor sidelængderne danner fibonacci's talrække, bliver ofte brugt i arkitekturen.

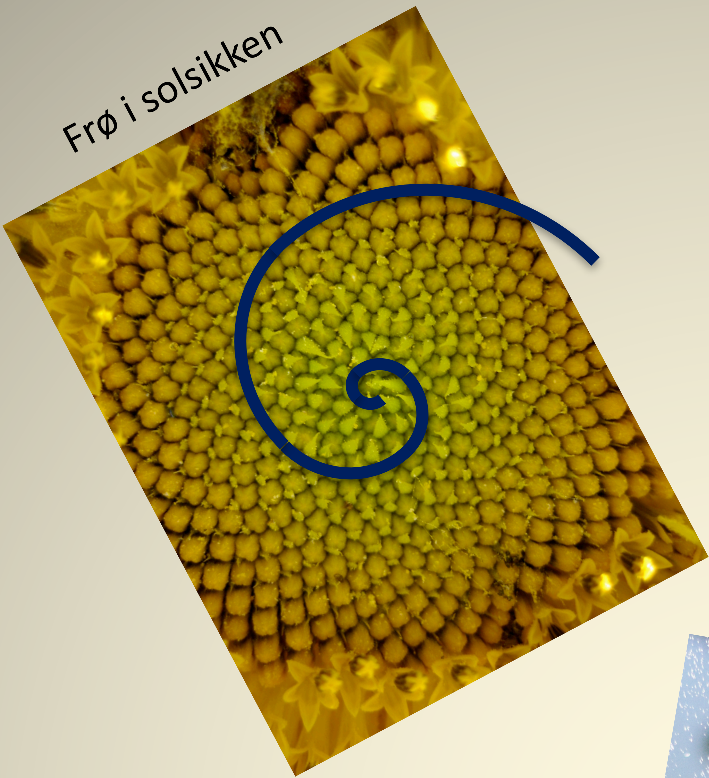


Det er muligt i hvert at kvadraterne at tegne en kvartcirkel. Derved fremkommer der en spiral. Naturen er fuld af spiralen dannet ud fra fibonacci-tallene.

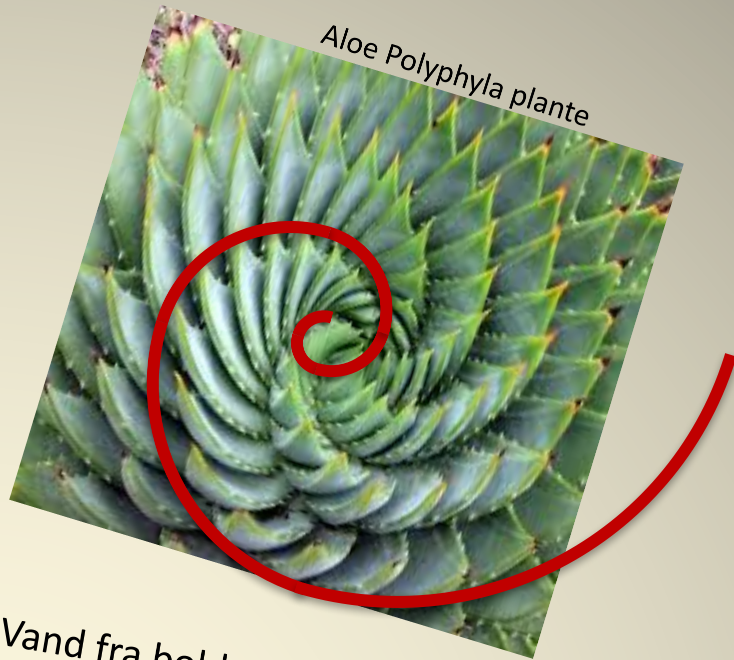
Illustrer nu Fibonacci-spiralen ud fra den angivne kvartcirkel. Overvej nøje, hvor centrum i den næste kvartcirkel skal placeres.



Ekssempler på Fibonacci-spiraler i naturen

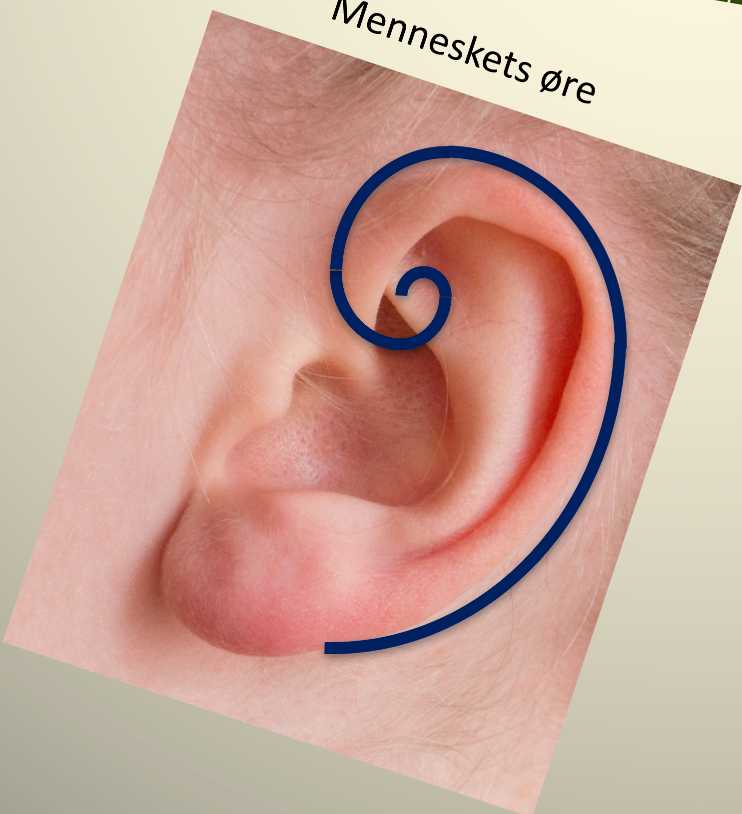


Frø i solsikken

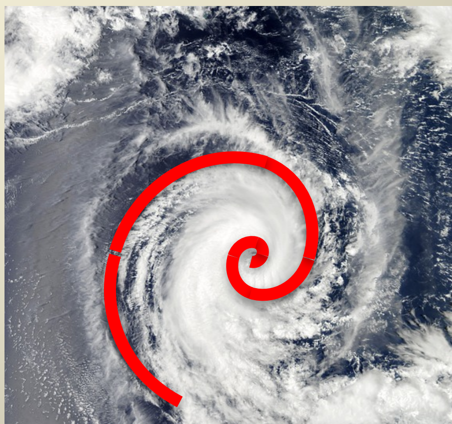


Aloe Polyphyla plante

Vand fra bold



Menneskets øre



Orkan

Fibonacci-tallene har endnu en tankevækkende sammenhæng. Prøv at finde forholdet mellem to på hinanden følgende fibonacci-tal.

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$\frac{2}{1} = 2$

$\frac{3}{2} = 1{,}5$

$\frac{5}{3} = 1.666$

$\frac{8}{5} = 1{,}600$

_______ = _________

_______ = _________

_______ = _________

_______ = _________

_______ = _________

_______ = _________

_______ = _________

_______ = _________

_______ = _________

_______ = _________

_______ = _________

_______ = _________

_______ = _________

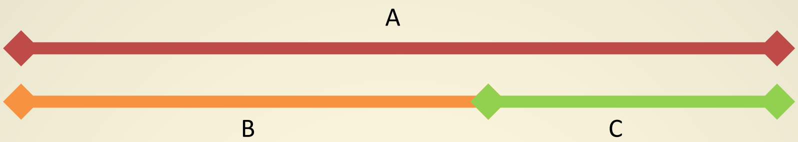
_______ = _________

_______ = _________

Tallet som fremkommer nærmer sig gradvist en konstant, som kaldes **Phi** φ– udtales ”fi” ikke at forveksle med Pi $\boldsymbol{\pi}$ som udtales pi.

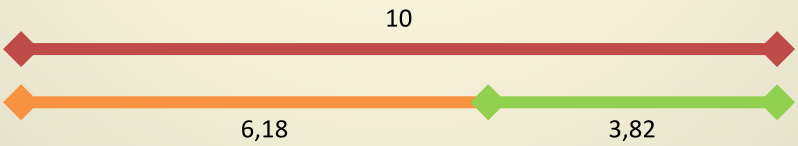
Linjeopdeling efter - φ

Phi (φ eller Φ = 1.618033988749895 ...) er et irrationelt tal ligesom pi ($\boldsymbol{\pi}$ = 3.14159265358979 ...)
Det betyder, at man ikke kan beskrive det som en brøk eller som et endeligt decimaltal. Det er et tal med uendelig mange decimaler.
Ligesom pi ($\boldsymbol{\pi}$) er forholdet mellem omkredsen af en cirkel og dens diameter $\frac{\boldsymbol{\pi}}{d}$, er phi (φ) forholdet mellem to linjestykker, der fremkommer, når en linje er opdelt på en "meget speciel og unik måde" (en meget udsædvanlig formulering indenfor matematik og naturvidenskab ☺).



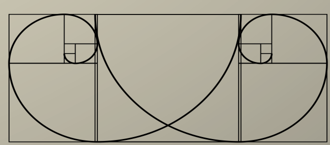
Forholdet mellem længden af hele linjen (A) og længden af det store linjestykket (B) er det samme som forholdet mellem længden af det store linjestykke (B) til længden af det mindre linjestykke (C).

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \varphi$$



$$\frac{10}{6{,}18} = \frac{6{,}18}{3{,}82} = 1{,}6181 = \varphi$$

Vælger man to længder, der er to fibonacci-tal, der er lige efter hinanden, vil man automatisk have forholdet $= \varphi$
Men man kan opdele enhver linje op efter φ ved at opdele den i forholdet 61,80% og 38,20% af den fulde længde.



Hvis man opdeler et sidelængderne på et maleri på den ”meget specielle og unikke måde” fra foregående side, kaldes det for Det gyldne Snit.

Det gyldne snit kaldes også som *det guddommelige snit* og er anvendt mange steder i kunsthistorien.

I forbindelse med billeders opbygning er det gyldne snit nogle bestemte punkter i billedet, hvor øjet finder hvile. Det er altså steder, hvor det er behageligt for øjet at søge hen.
Det gyldne snit er bliver brugt af kunsthåndværkere, kunstmalere og fotografer – og naturligvis også reklamebureauer – til at fremhæve særlige detaljer i en genstand eller et billede.

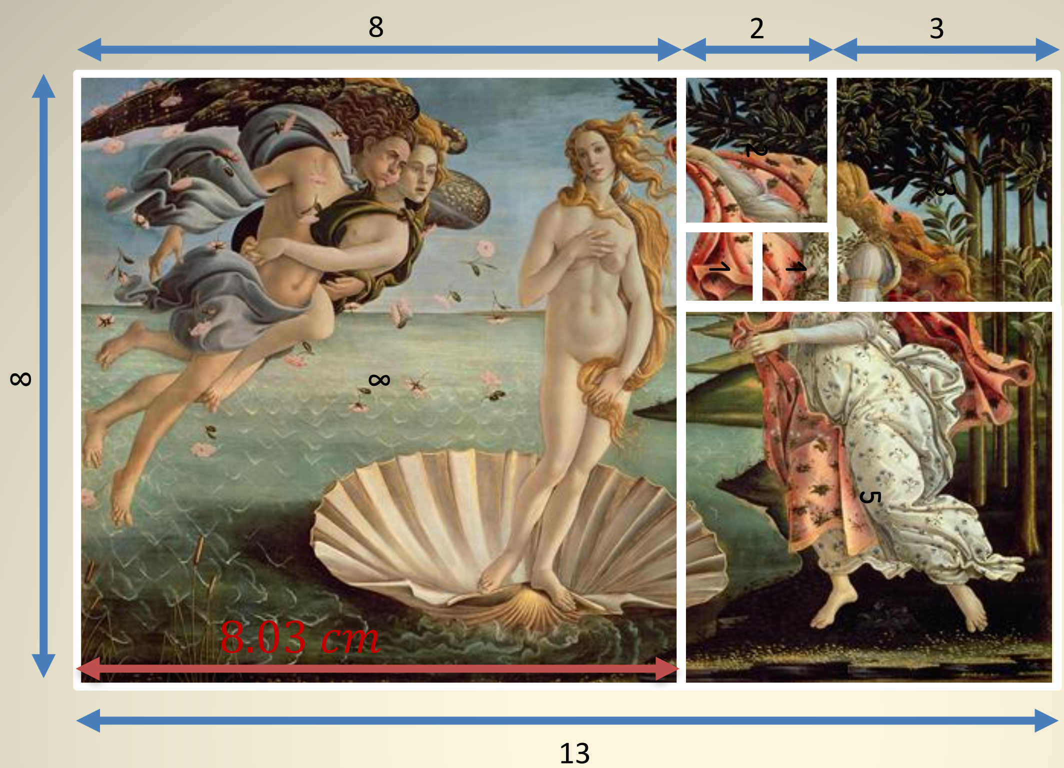
Når nu øjet søger bestemte steder hen i billedet, giver det god mening at placere noget vigtigt netop dér, hvor det gyldne snit ligger.

Det kan du selv bruge til at tage bedre billeder.

Vi ser nu på et af kunsthistoriens helt store malerier. Den italienske maler Sandro Botticelli (1445-1510) har malet det berømte maleri Venus.

Vi anvender både Fibonacci-kvadraterne og forholdsberegning til at vise Det gyldne Snit.

Hvis man tager Fibunacci-kvadraterne fra side 10 og placerer henover maleriet af Venus, kan man se, at sidelængderne passer med kvadraterne.

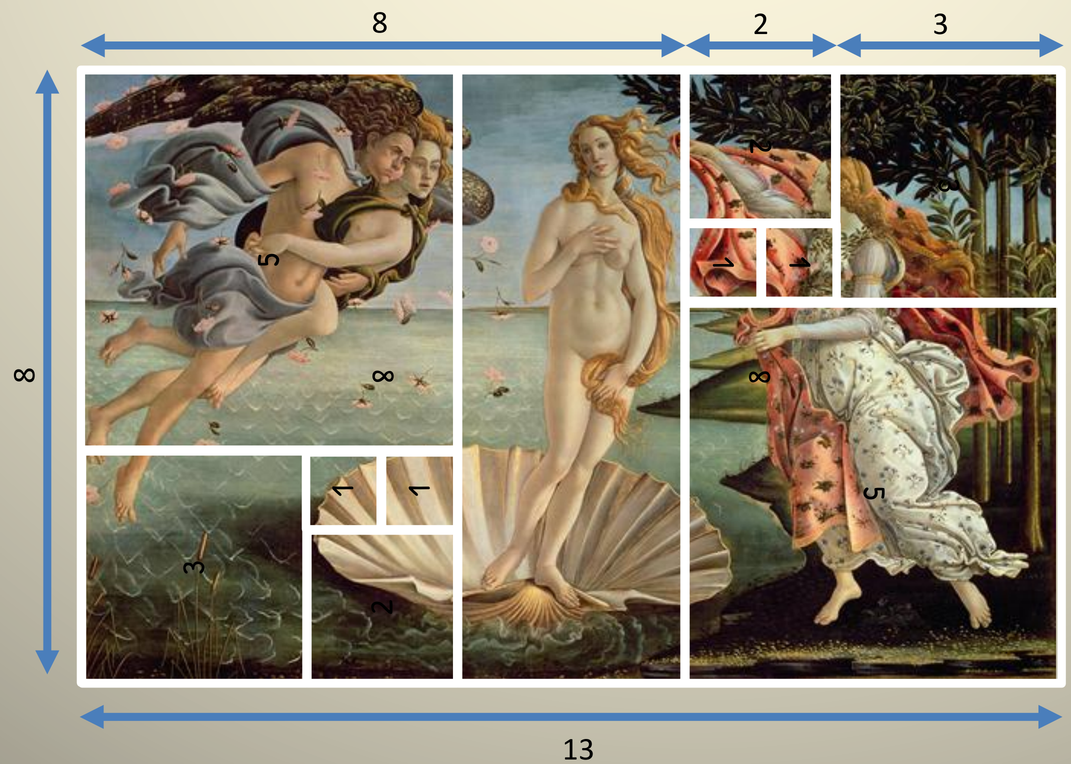


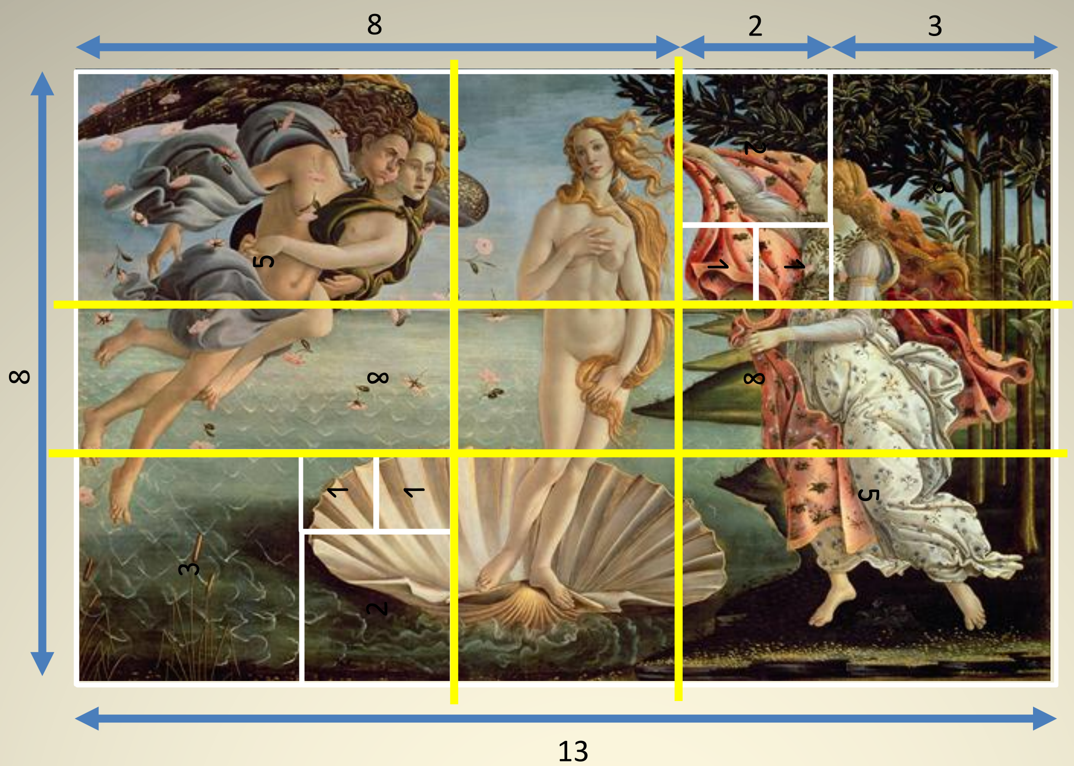
$$\frac{13}{8} = 1.625 \approx \varphi$$

Skal vi beregne, hvor den lodrette streg skal være, kan vi sige: $\boldsymbol{D} = \dfrac{13\ cm}{1.618}$

$$= 8.03\ cm$$

Vi roterer nu Fibonacci-kvadraterne.

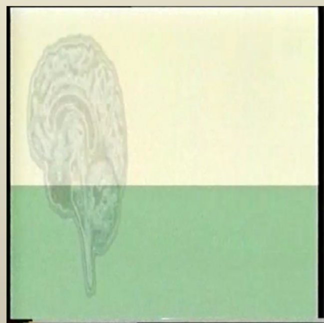




Læg nu mærke til at:

- Venus er placeret i midtersektionen. Hendes højre fod rører næsten den gule linje til venstre. Hendes hår rører den gule linje mod højre.
- Vestenvinden Zefyr omfavnet af Flora er i kvadratet med sidelængen 5 øverst mod venstre. *(Vestenvinden blæser Venus, der står i en muslingeskal ind mod kysten)*
- Forårets gudinde Prima Vera (iført hvid kjole) overskrider ikke den gule linje mod højre.
- *(Forårets gudinde modtager Venus og iføre hende en sømmelig, blomstersmykket kåbe)*
- Horisonten ligger langs den øverste gule linje.
- Muslingeskallens øverste kant tangere den nederste gule linje.

Botticellis udnyttelse af det gyldne snits usynlige akser skaber balance og harmoni i billedet.



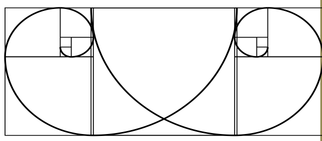
Inden du selv skal i gang kan din lærer give dig adgang til en film på CFU, der hedder:

Naturens skjulte mønstre
30 min.
http://hval.dk/mitCFU/mm/player/?copydan=030103272030

Prøv at gøre det samme med Leonardo da Vinci's maleri Den sidste Nadver.

Dimensionerne passer ikke til at kunne benytte kvadraterne. Du bliver nødt til at fortage beregningerne.

Hvad kan du se af Det gyldne Snit?

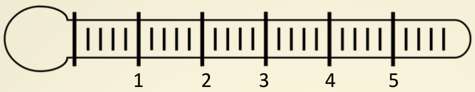


Der i dette forløb været anvendt flere af de matematiske kompetencer i dette forløb. Nu skal du evaluere på de overordnede læringsmål.

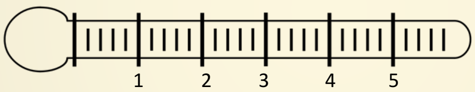
Overordnede læringsmål:

Efterevaluering

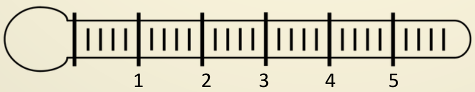
At se matematik i en historisk sammenhæng



At kunne genkende den matematiske model som fibonacci repræsenteret i naturen



At kunne lave en repræsentation af fibonaccis talrække på flere måder



Skriv tre ting du enten har lært, undrer dig over eller ønsker at undersøge yderligere.