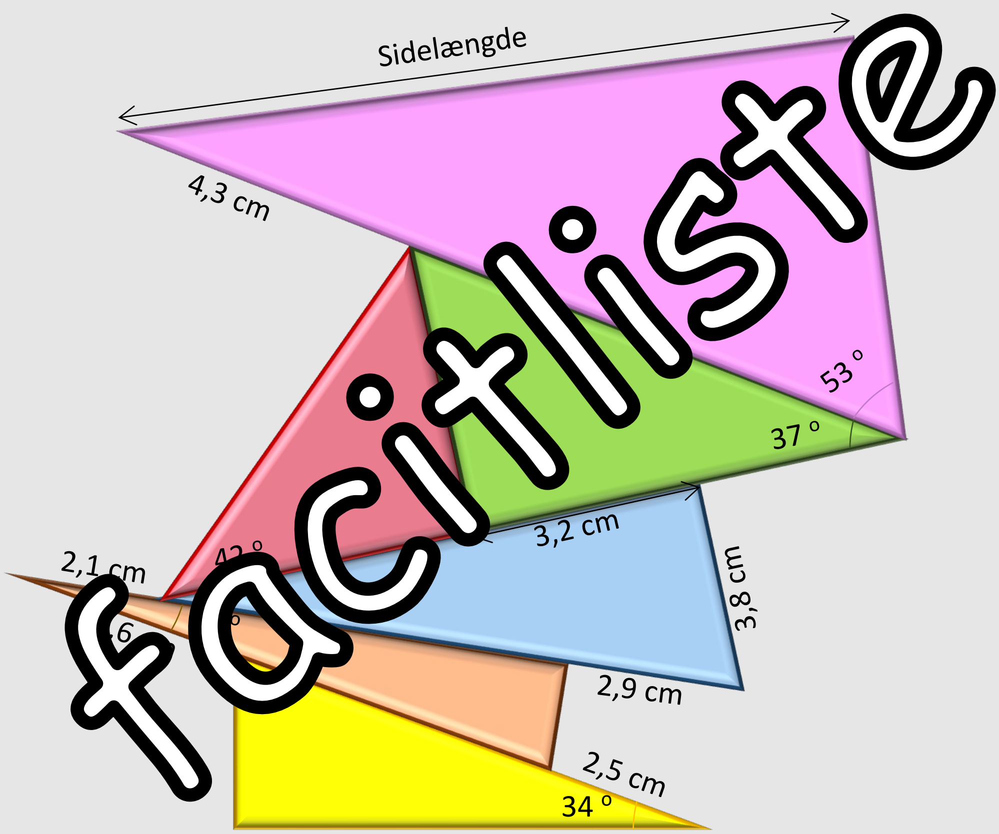
# Pythagoras & Trigonometri

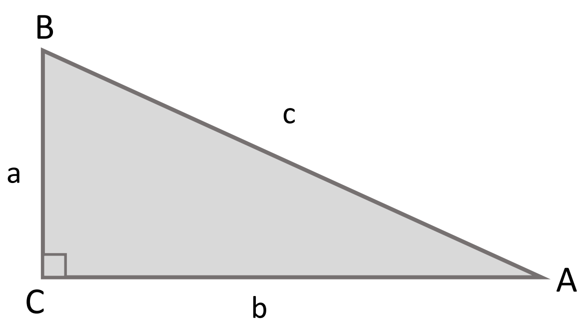
## facitliste



# Indhold

## Indholdsfortegnelse






$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

$$Cos(A) = \frac{a}{c}$$

| | | Før | Efter |
|---|---|---|---|
| Prestrukturel | Jeg kan regne med kvadrede tal og kvadratrødder. | | |
| Unistrukturel | Jeg ved, at der er en sammenhæng mellem vinklerne og sidelængderne i en retvinklet trekant. | | |
| Multiistrukturel | Jeg kender formlerne, men er usikker i alt bruge dem til beregning af sider eller vinkler. | | |
| Relationel | Jeg kender og kan bruge formlerne til at beregne alle manglende sidelængder og vinkler i en retvinklet trekant. | | |
| Udvidet abstrakt | Jeg kan løse problemer med mere end en retvinklet trekant, hvor løsningen af den ene videreføres til beregning i den næste. | | |

# Pythagoras

Pythagoras fra Samos  (Grækenland)

582 f.Kr. - 507 f.Kr.

Pythagoras var også filosof. Han forenede i sin lære matematik og talmystik med musik og forestillingen om sjælens udødelighed.

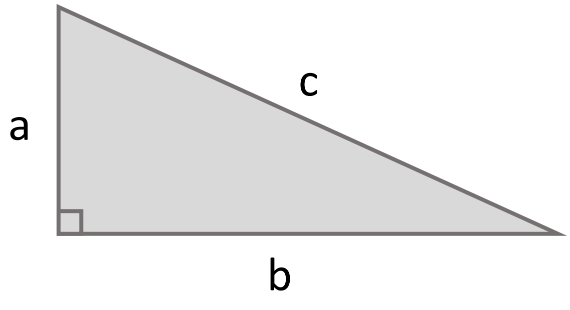
Pythagoras sætning angår forholdet mellem længden af siderne i en retvinklet trekant

- MEN i VIRKELIGHEDEN VAR DET SNYD!!!

Pythagoras har lagt navn til den pythagoræiske læresætning, men han opfandt den ikke.

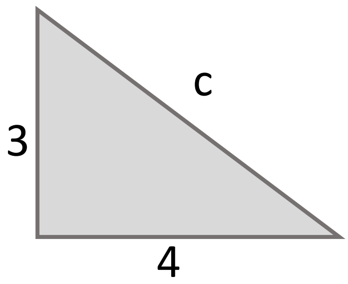
Den var kendt i Babylon allerede ca. 1800 f.Kr.

PYTHAGORAS.




$$a^2 + b^2 = c^2$$

# Retvinklet trekant



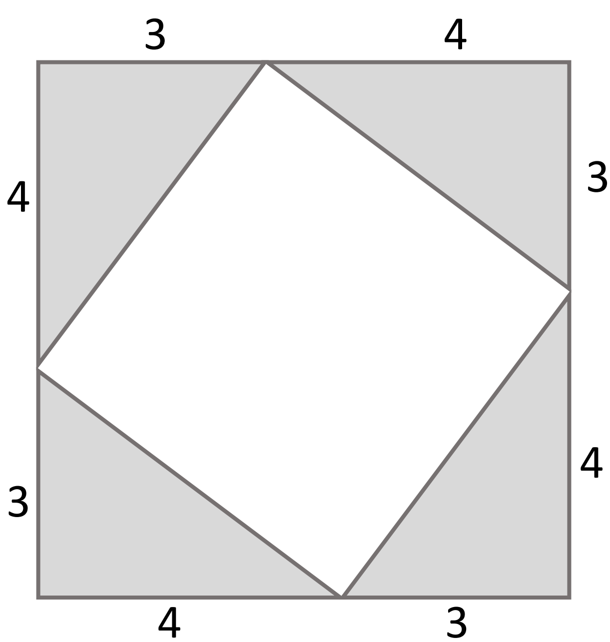

Tegn en retvinklet trekant med kateterne a = 3 cm og b = 4 cm. Mål c med en lineal. Beregn arealet af trekanten.

c = 5 cm

$\text{Areal}_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$

$= 6\ \text{cm}^2$

Tegn yderligere tre af disse trekanter, som vist på figuren.




Vi kan nu finde arealet af de fire små trekanter i det store kvadrat.

$\text{Areal}_{4\triangle} = 24\ \text{cm}^2$

Vi finder dernæst arealet af hele det store kvadrat.

Sidelængden = 7 cm

$\text{Areal}_{\square} = l \cdot b$

$= 49\ \text{cm}^2$

Vi kan nu finde arealet af det hvide kvadrat i midten.

$\text{Areal}_{\diamond} = \text{Areal}_{\square} - \text{Areal}_{4\triangle}$

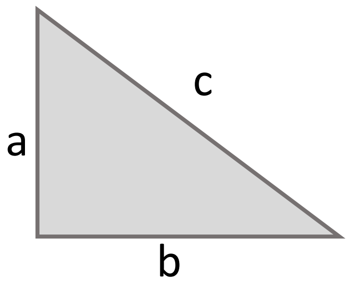
$= 25\ \text{cm}^2$

Til slut kan vi finde sidelængden c på det hvide kvadrat i midten.

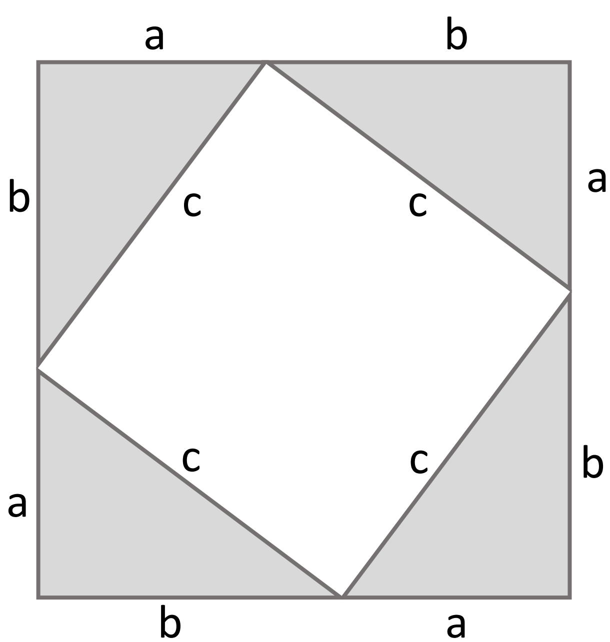
$c = \sqrt{\text{Areal}_{\diamond}}$

$= 5\ \text{cm}$

# Bevis for Pythagoras' sætning




Tegn yderligere tre af disse trekanter, som vist på figuren




Arealet af hele det store kvadrat kan også beregnes som

$$\text{Areal}_{\square} = (a + b) \cdot (a + b)$$

$$= a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$$

$$= a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$$

$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Nu erstatter vi alle tallene med variablerne a, b og c. Arealet af trekanten er så:

$$\text{Areal}_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

Arealet af de fire små trekanter i det store kvadrat kan så skrives som:

$$\text{Areal}_{4\triangle} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

$$= 2 \cdot a \cdot b$$

Vi finder dernæst arealet af hele det store kvadrat som summen af de fire små trekanter og det hvide kvadrat i midten.

$$\text{Areal}_{\square} = \text{Areal}_{\diamond} + \text{Areal}_{4\triangle}$$

$$= c^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

De to arealer må selv sagt være det samme.

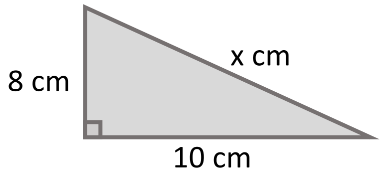
$$a^2 + \cancel{2 \cdot a \cdot b} + b^2 = c^2 + \cancel{2 \cdot a \cdot b}$$

Herved fås Pythagoras' læresætning.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

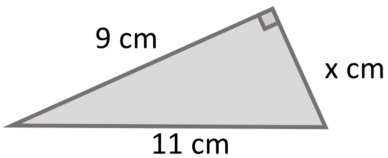
# Opgaver med Pythagoras' sætning

Opgaver 1 – Pythagoras



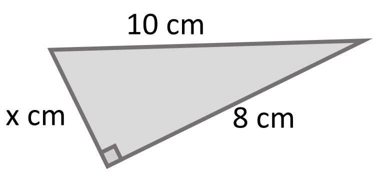

x = $\sqrt{164} = 12{,}61$ cm

Opgave 2 – Pythagoras



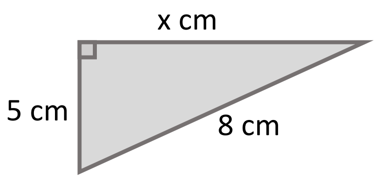

x = $\sqrt{40} = 6{,}32$ cm

Opgaver 3 – Pythagoras



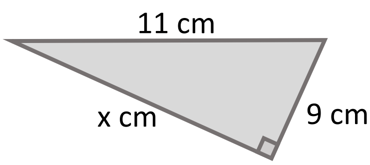

x = $\sqrt{36} = 6$ cm

Opgaver 4 – Pythagoras



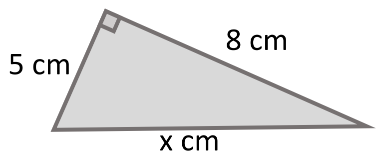

x = $\sqrt{39} = 6{,}24$ cm

Opgaver 5 – Pythagoras




x = $\sqrt{40} = 6{,}32$ cm

Opgaver 6 – Pythagoras

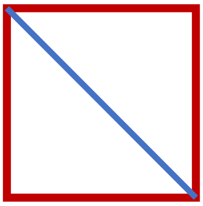


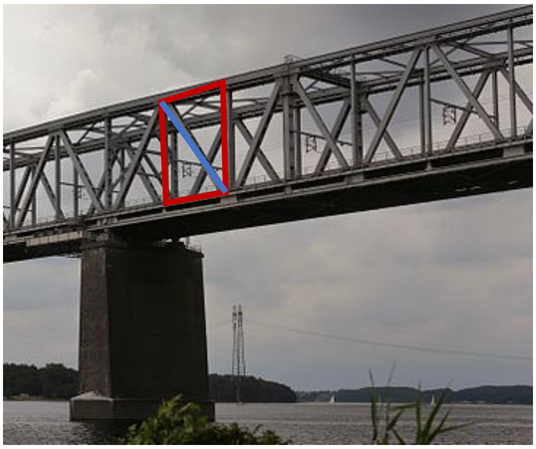

x = $\sqrt{89} = 9{,}43$ cm

# Opgaver med Pythagoras' sætning

## Opgaver 7 – Pythagoras

- Den gamle Lillebæltsbro



$a^2 + b^2 = c^2$

$5^2 + 4^2 = 25 + 16 = c^2$

$c = \sqrt{41} = 6{,}40$ m

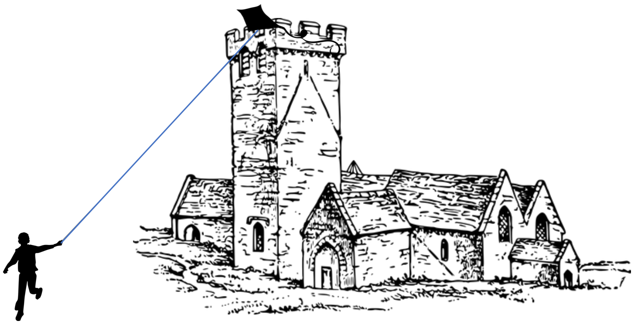
Hvor lange er tværstiverne? 6,40 m

## Opgave 8 – Pythagoras

- Drageflyvning

Dragens line er 50 m

Afstand mellem dreng og tårn = 45 m



$a^2 + b^2 = c^2$

$50^2 - 45^2 = 2500 - 2025 = 475 = a^2$

$c = \sqrt{475} = 21{,}79$ m

Hvor højt er tårnet? 21,79 m

## Opgaver 9 – Pythagoras

- Lyskæde til legehus

Gavlen på legehuset er 170 cm højt
Legehuset er 160 cm bredt

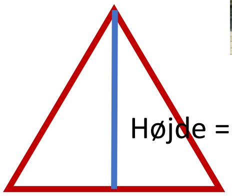
$a^2 + b^2 = c^2$

$1{,}7^2 + 0{,}8^2 = 2{,}89 + 0{,}64 = c^2$

$c = \sqrt{3{,}53} = 1{,}88$ m

længde = 2 • 1,88 = 3,76 m

Hvor lang skal lyskæden være for at kunne sidde på gavlen af taget? 3,76 m



# Opgaver med Pythagoras’ sætning

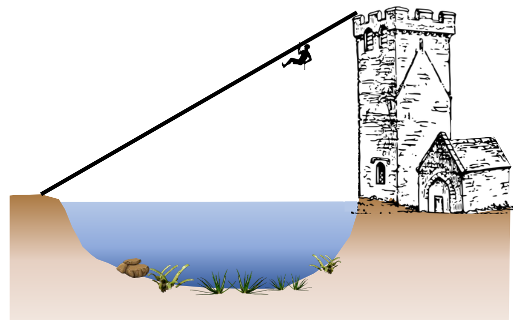
## Opgaver 10 – Pythagoras

- Svævebane

Tårnet er 20 m højt

Afstanden over søen er 50 m

De to sider af søen er i niveau med hinanden.

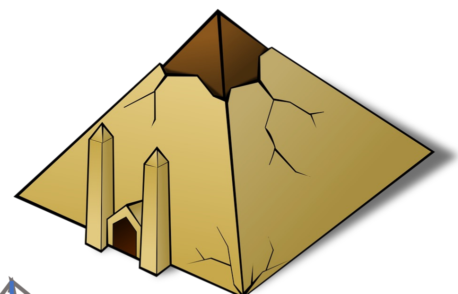


$a^2 + b^2 = c^2$

$50^2 + 20^2 = 2500 + 400 = 2900 = c^2$

$c = \sqrt{2900} = 53{,}85$ m

Hvor lang er svævebanens kabel? 53,85 m

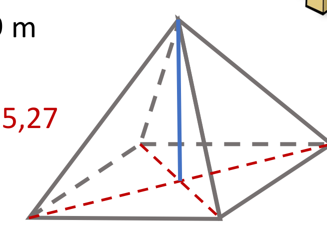


## Opgave 11 – Pythagoras

- Pyramide

Pyramidens sidelængde er 230 m

Den skrå linje fra hvert hjørne er til toppen er 219 m



$a^2 + b^2 = c^2$

Diagonalen af grundfladen = $\sqrt{230^2 + 230^2} = 325{,}27$

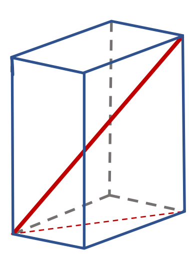
Halvdelen af diagonalen = 162,63

Højden på pyramiden = $\sqrt{219^2 - 162{,}63^2} =$ 146,67 m

Hvor høj er pyramiden? 146,67 m

## Opgaver 12 – Pythagoras

- Forsendelse med pakkepost



Kassens mål er 6 cm x 8 cm x 15 cm
Stokken er 20 cm

$a^2 + b^2 = c^2$

$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = c^2$

$c = \sqrt{100} = 10$ cm

Længde = $\sqrt{10^2 + 15^2} = 18{,}03$

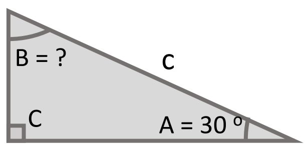
Kan stokken være i kassen? nej

# Vinkelsummen i en trekant

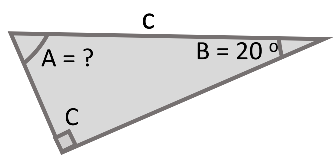
Pythagoras' sætning er god til at finde sidelængderne i en retvinklet trekant. Men den kan intet sige os om vinklerne. Vi kan på den måde ikke finde nogle af de to ukendte vinklerne. Men kender vi bare den ene af de to ubekendte vinkler, kan vi let finde den anden.

Vi ved at vinkelsummen i en trekant altid er 180°.

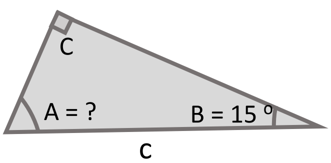
Find alle tre vinkler i nedenstående trekanter.



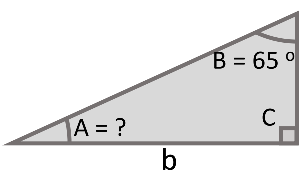

B = 60 °



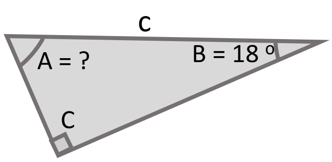

A = 70 °



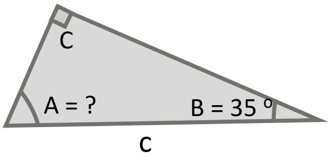

A = 75 °



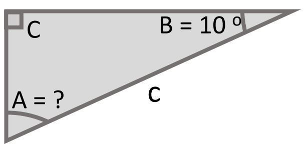

A = 25 °



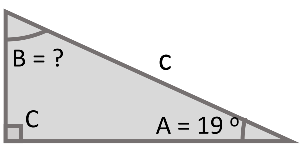

A = 72 °



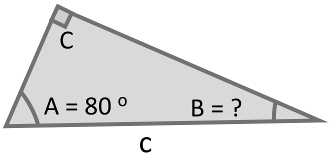

A = 55 °



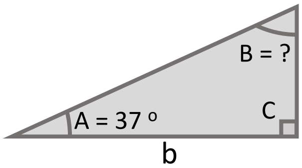

A = 80 °




B = 71 °




B = 10 °




B = 53 °

# Ligedannede trekanter

Pythagoras' sætning er god til at finde sidelængderne i en retvinklet trekant. Men den kan intet sige os om vinklerne. Vi kan på den måde ikke finde nogle af vinklerne eller afgøre om to trekanter er ligedannede alene ved hjælp af Pythagoras.

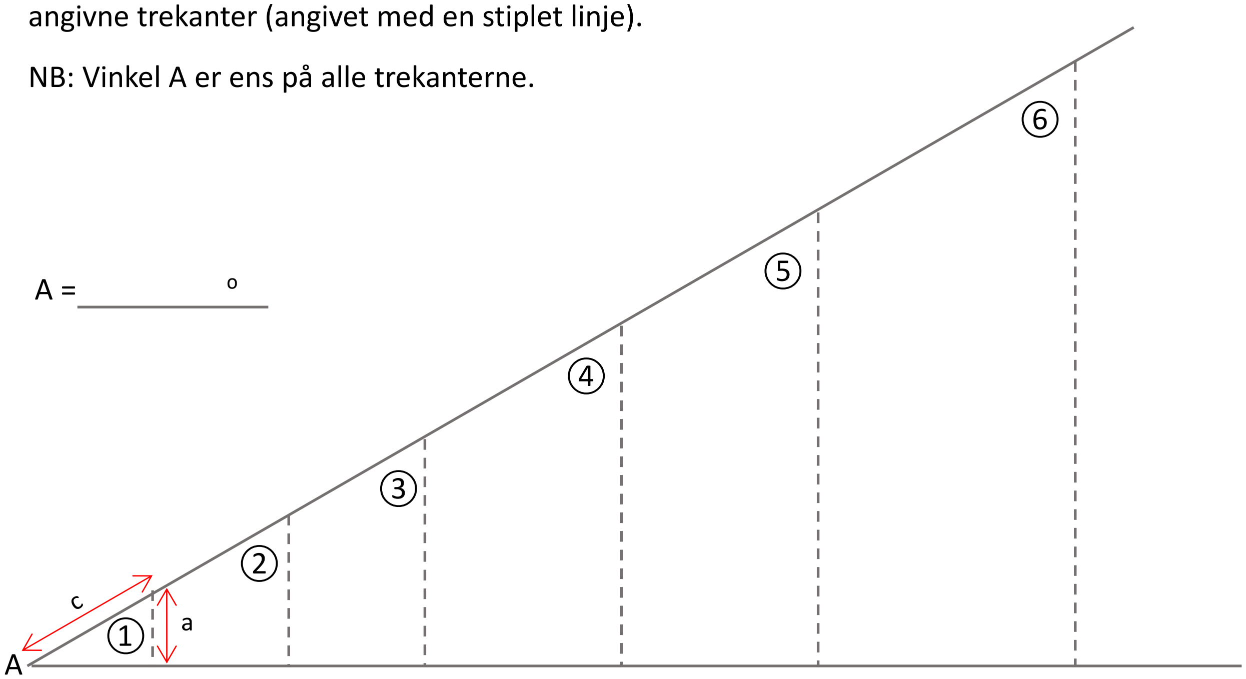
Ligedannede trekanter :

- Vi siger, at to **trekanter** er ligedannede, hvis deres vinkler er parvist lige store. Man kalder også de to trekanter for ensvinklede
- Ligedannede eller ensvinklede **trekanter** vil have samme form, og den eneste forskel på dem vil være, at den ene er i et eller andet størrelsesforhold til den anden.

Der er en sammenhæng mellem sidelængderne i en retvinklet trekant og de tilhørende vinkler. Her er indtegnet en given vinkel. Mål højden a og den dertilhørende hypotenuse for hver af de angivne trekanter (angivet med en stiplet linje).

NB: Vinkel A er ens på alle trekanterne.

A = ________ °




① $\frac{a}{c} = \frac{1}{2} =$ 0,5 ③ $\frac{a}{c} =$ ________ = 0,5 ⑤ $\frac{a}{c} =$ ________ = 0,5

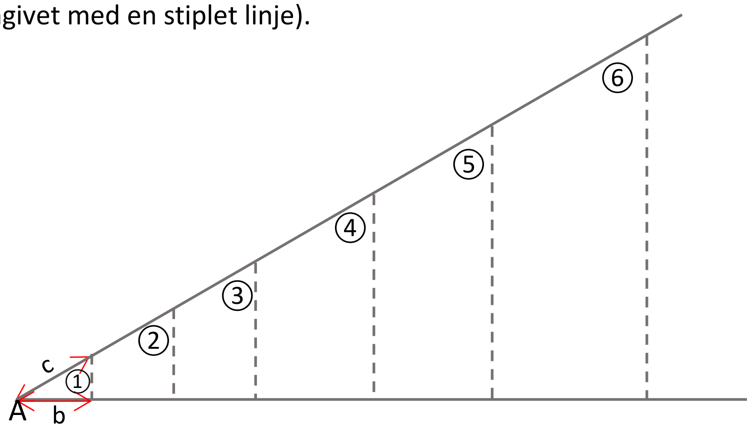
② $\frac{a}{c} =$ ________ = 0,5 ④ $\frac{a}{c} =$ ________ = 0,5 ⑥ $\frac{a}{c} =$ ________ = 0,5

# Ligedannede trekanter

Der er åbenbart en sammenhæng mellem sidelængden a og hypetenusen i en retvinklet trekant og så den tilhørende vinkler.

Her er indtegnet den samme vinkel. Mål nu længden b og den dertilhørende hypotenuse for hver af de angivne trekanter (angivet med en stiplet linje).

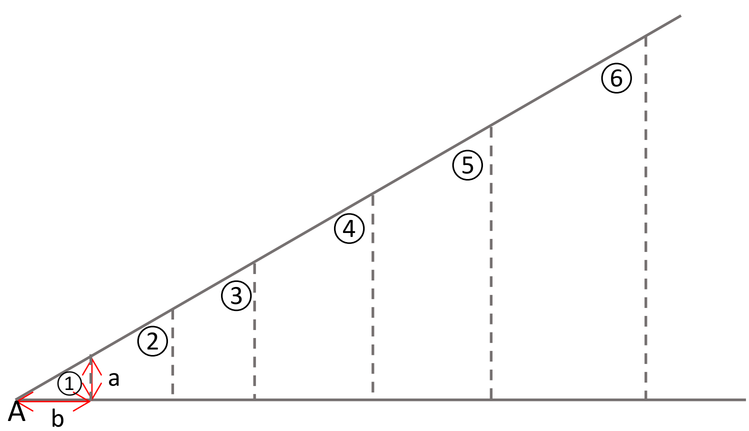
A = ________ °




① $\frac{b}{c} =$ ________ = 0,87  ③ $\frac{b}{c} =$ ________ = 0,87  ⑤ $\frac{b}{c} =$ ________ = 0,87

② $\frac{b}{c} =$ ________ = 0,87  ④ $\frac{b}{c} =$ ________ = 0,87  ⑥ $\frac{b}{c} =$ ________ = 0,87

Her er indtegnet den samme vinkel. Mål nu længden a og længden b for hver af de angivne trekanter.




① $\frac{a}{b} =$ ________ = 0,5774  ③ $\frac{a}{b} =$ ________ = 0,5774  ⑤ $\frac{a}{b} =$ ________ = 0,5774

② $\frac{a}{b} =$ ________ = 0,5774  ④ $\frac{a}{b} =$ ________ = 0,5774  ⑥ $\frac{a}{b} =$ ________ = 0,5774

# Enhedscirklen

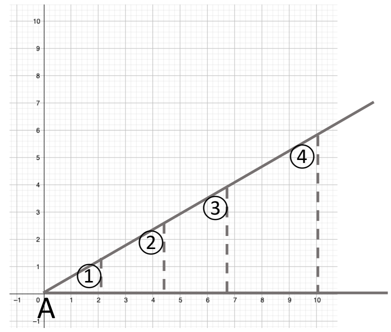
Nu lægger vi samme vinkel ind i et koordinatsystem.

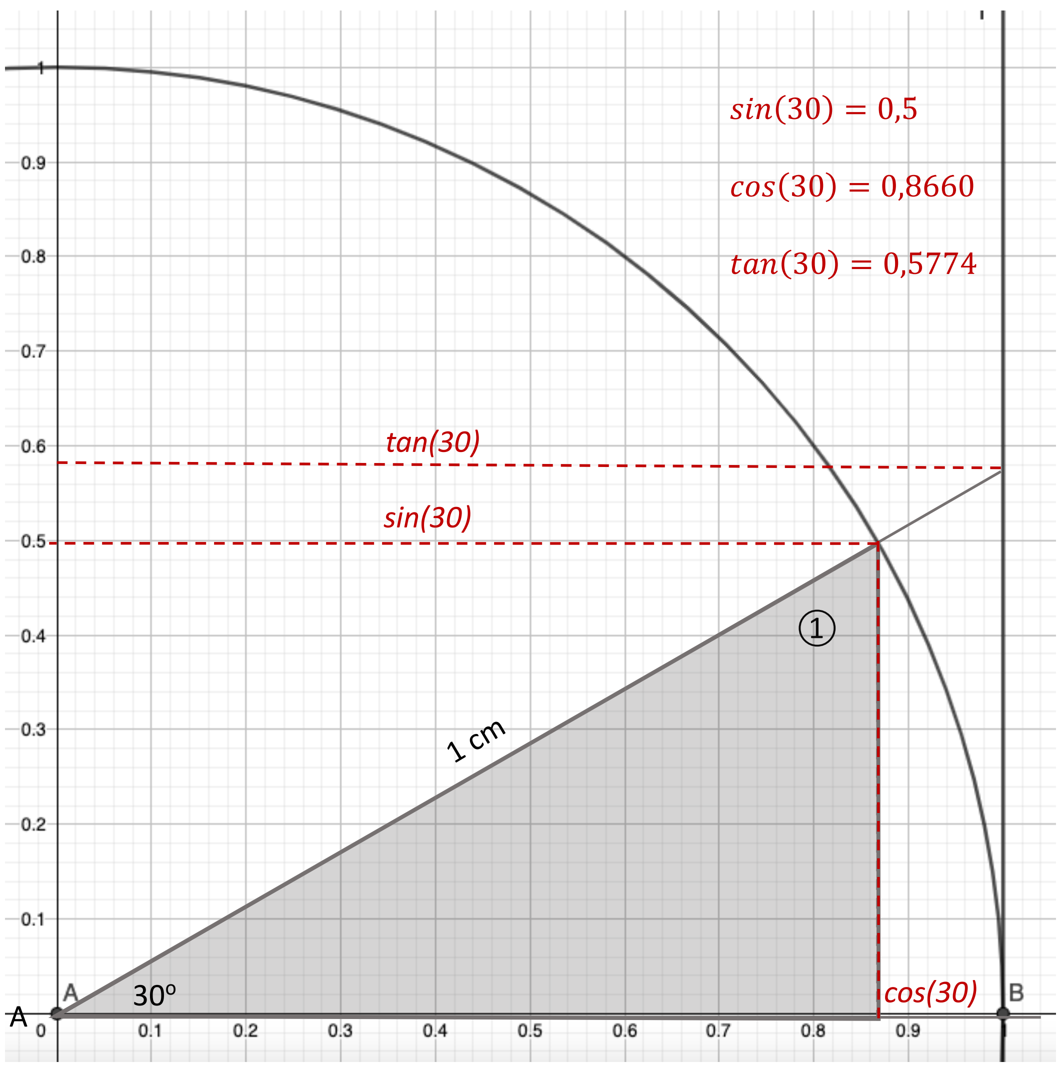
Hvis vi kun ser på, hvad der sker i koordinatsystemet i en cirkel med en radius på 1 i forhold til koordinatsættet (0,0).

På y- aksen kan vi aflæse sin(30) = 0,5

På x-aksen kan vi aflæse cos(30) = 0,8660

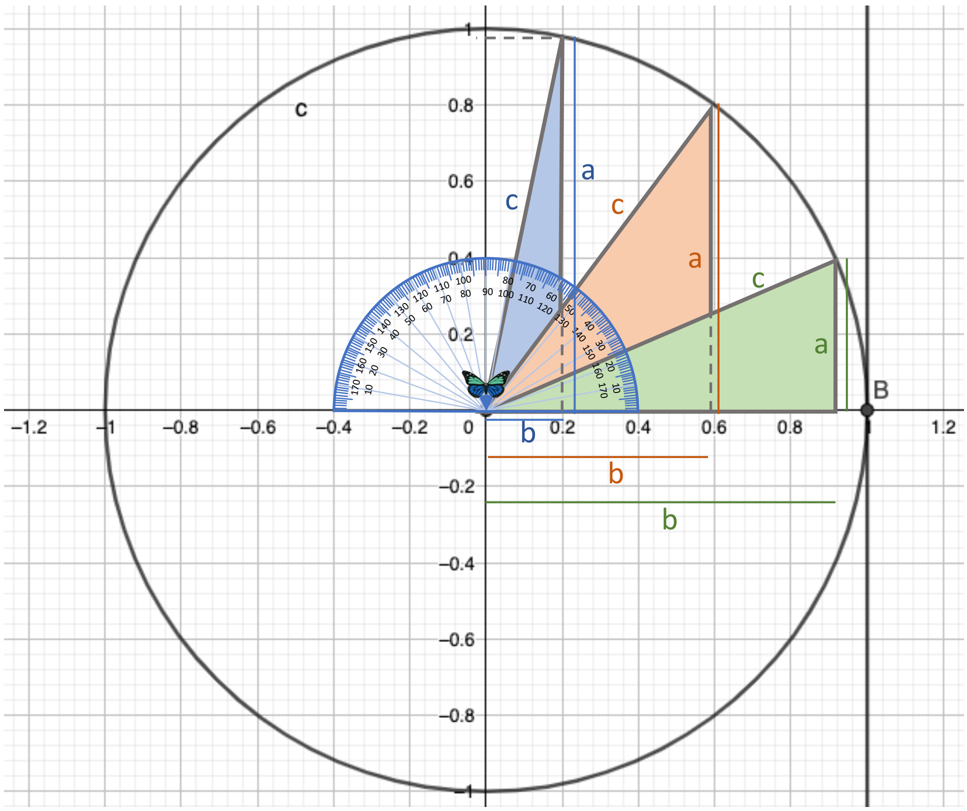
På y-aksen kan vi, hvor vinklen skærer tangenten aflæse tan(30) = 0,5774.

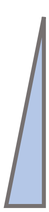


# Trigonometriske formler

Mål sidelængderne for hver af trekanterne. Beregn og aflæs sin(A), cos(A). Sammenlign resultaterne.



$A_{\text{målt}} =$ 80 °

$a_{\text{aflæst}} =$ 0,96

$b_{\text{aflæst}} =$ 0,2

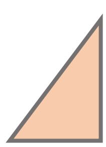
$c_{\text{aflæst}} =$ 1

$\sin(A)_{\text{aflæst}} =$ 0,96

$\cos(A)_{\text{aflæst}} =$ 0,2

$\frac{a}{c} =$ 0,96

$\frac{b}{c} =$ 0,2



$A_{\text{målt}} =$ 52 °

$a_{\text{aflæst}} =$ 0,8

$b_{\text{aflæst}} =$ 0,6

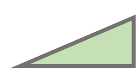
$c_{\text{aflæst}} =$ 1

$\sin(A)_{\text{aflæst}} =$ 0,8

$\cos(A)_{\text{aflæst}} =$ 0,6

$\frac{a}{c} =$ 0,8

$\frac{b}{c} =$ 0,6



$A_{\text{målt}} =$ 22 °

$a_{\text{aflæst}} =$ 0,4

$b_{\text{aflæst}} =$ 0,92

$c_{\text{aflæst}} =$ 1

$\sin(A)_{\text{aflæst}} =$ 0,4

$\cos(A)_{\text{aflæst}} =$ 0,92

$\frac{a}{c} =$ 0,4

$\frac{b}{c} =$ 0,92

# Trigonometrisk formler

Vi er nu nået frem til at følgende formler gælder for retvinklede trekanter.

$$\sin(A) = \frac{a}{c}$$

$$a = c \cdot \sin(A)$$

$$c = \frac{a}{\sin(A)}$$

$$\cos(A) = \frac{b}{c}$$

$$b = c \cdot \cos(A)$$

$$c = \frac{b}{\cos(A)}$$

$$\tan(A) = \frac{a}{b}$$

$$a = b \cdot \tan(A)$$

$$b = \frac{a}{\tan(A)}$$

$$\sin(B) = \frac{b}{c}$$

$$b = c \cdot \sin(B)$$

$$c = \frac{b}{\sin(B)}$$

$$\cos(B) = \frac{a}{c}$$

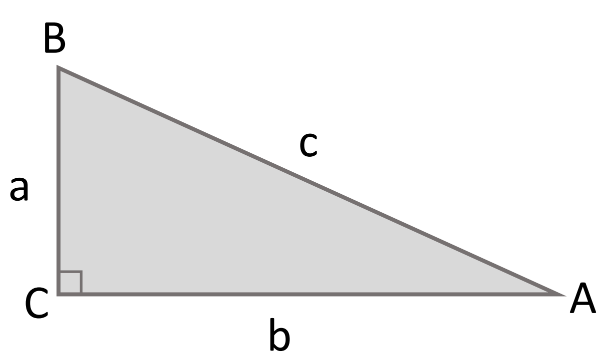
$$a = c \cdot \sin(B)$$

$$c = \frac{a}{\cos(B)}$$

$$\tan(B) = \frac{b}{a}$$

$$b = a \cdot \tan(B)$$

$$a = \frac{b}{\tan(B)}$$



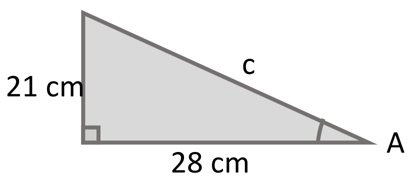
# Opgaver med trigonometriske formler

Det betyder, at får vi blot to yderligere informationer om en given retvinklet trekant, hvoraf mindst den ene er en sidelængde, kan vi beregne alle tre vinkler og alle tre sidelængder.

Vi kan bruge, at vinkelsummen i en trekant altid er 180$^o$., Pythagoras' læresætning og de trigonometriske formler.

Løs nedenstående opgaver

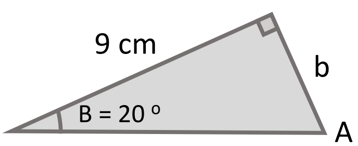
## Opgaver 1 – Trigonometri




c = 35 cm

∠A = 36,87 $^o$

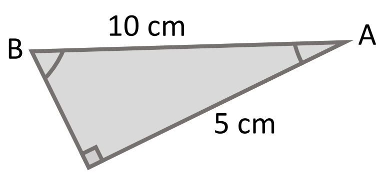
## Opgave 2 – Trigonometri




b = 3,3 cm

∠A = 70 $^o$

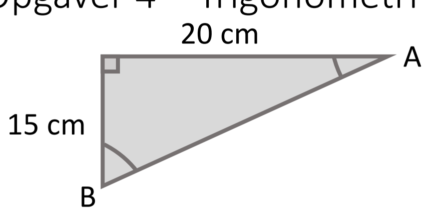
## Opgaver 3 – Trigonometri




∠A = 60 $^o$

∠B = 30 $^o$

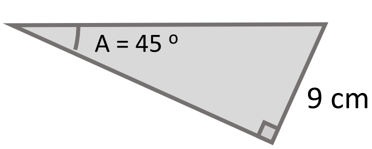
## Opgaver 4 – Trigonometri




∠A = 36,7 $^o$

∠B = 53,3 $^o$

## Opgaver 5 – Trigonometri

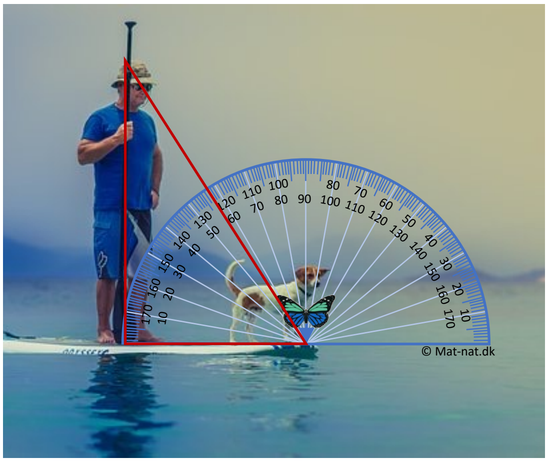



∠B = 45 $^o$

b = 9 cm

# Opgaver med trigonometriske formler

## Opgaver 6 – Trigonometri




- Mandens højde

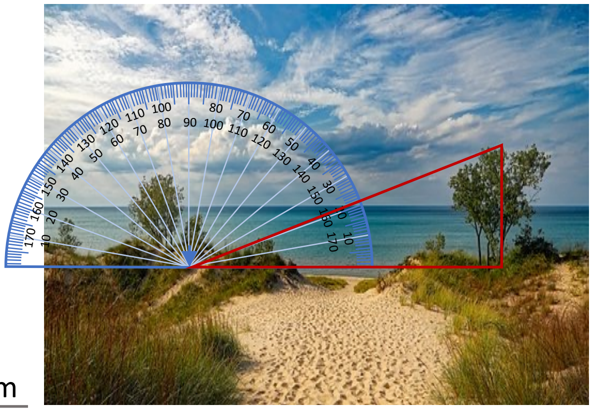
Længden fra mandens fødder til forenden af surfboardet er 1,2 m

$a \;= b \;\cdot \tan(A)$

1,2 * tan(57) = 1,85

Hvor høj er manden? 1,85 m

## Opgave 7 – Trigonometri



- Strandbuske

Afstanden mellem de to buske er 3,5 m

$a \;= b \;\cdot \tan(A) =$

3,5 * tan(21) = 1,34

Hvor høj er busken til højre? 1,34 m

## Opgaver 8 – Trigonometri

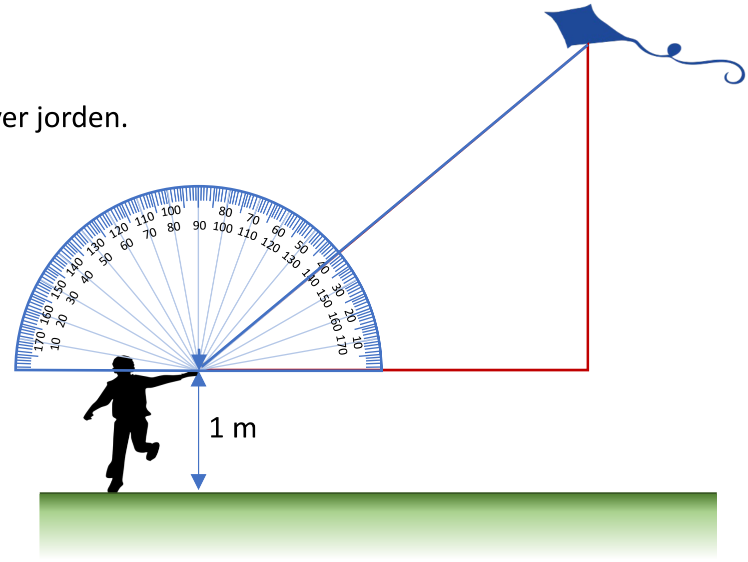
- Drageflyvning

Drengen holder fast i dragen 1 meter over jorden.
Linen er 25 meter.

$a + 1 = c \;\cdot \sin(A) + 1 =$

25*sin(40) + 1=

17,07 m




Hvor højt over jorden flyver dragen?

17,07 m

# Opgaver med trigonometriske formler

## Opgaver 9 – Trigonometri

- Telttur

Ved køb af telt medfølger nedenstående tegning.

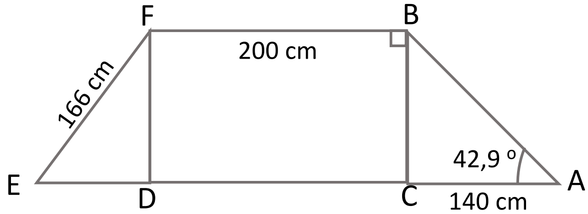
*Højde:*

$a = b \cdot \tan(A)$

140 * tan(42,9) = 130

*Længde:*

$a = \sqrt{166^2 - h^2} + 200 + 140 = 443{,}2$




Hvor højt lDFl er teltet? 1,30 m

Hvor langt lEAl er teltet? 4,432 m

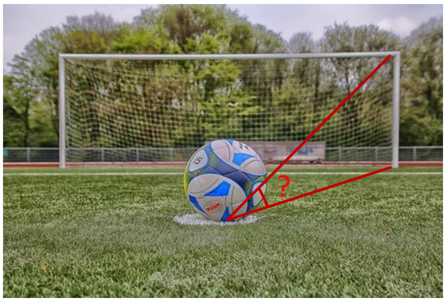
## Opgave 10 – Trigonometri

- Straffespark

Afstanden mellem bold og midten af målet er 11 m

Målets bredde er 7,32 m

Målets højde er 2,44 m




$afstand\ fra\ bold\ til\ stolpe = \sqrt{11^2 + \left(\frac{7{,}32}{2}\right)^2} = 11{,}6$

*Vinkel:*

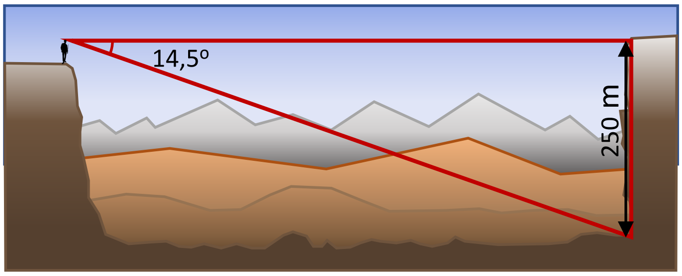
$\tan^{-1}\left(\frac{2{,}44}{11{,}6}\right) = 11{,}88\,^{o}$

Hvad er den største vinkel spilleren kan sparke i for at bolden sidder i hjørnet? 11,88 °
(Det antages at der sparkes så hårdt, at vi kan beskrive boldens bane som en ret linje)

## Opgaver 11 – Trigonometri

- Kløft

Kløftens dybde er 250 m
Vinklen til modstående kløfts bund er 14,5°




$b = \frac{a}{\tan(A)} = \frac{250}{\tan(14{,}5)} = 966{,}68$ m

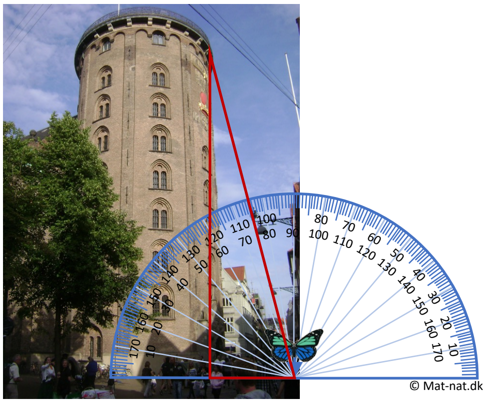
Hvor bred er kløften? 966,68 m

# Opgaver med trigonometriske formler

## Opgaver 12 – Trigonometri

- Rundetårn

Bredden på gågaden foran Rundetårn er 11 m



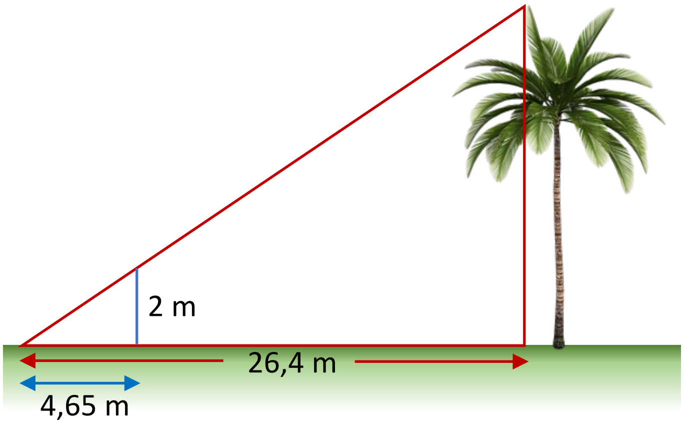

$a = b \cdot \tan(A)$

11 * tan(75) = 41 m

Hvor højt er Rundetårn? 41 m m

## Opgave 13 – Trigonometri

- Palme – ligedannede trekanter




$$a = 2 * \frac{26,4}{4,65} = 11,35$$

Hvor høj er palmen? 11,35 m

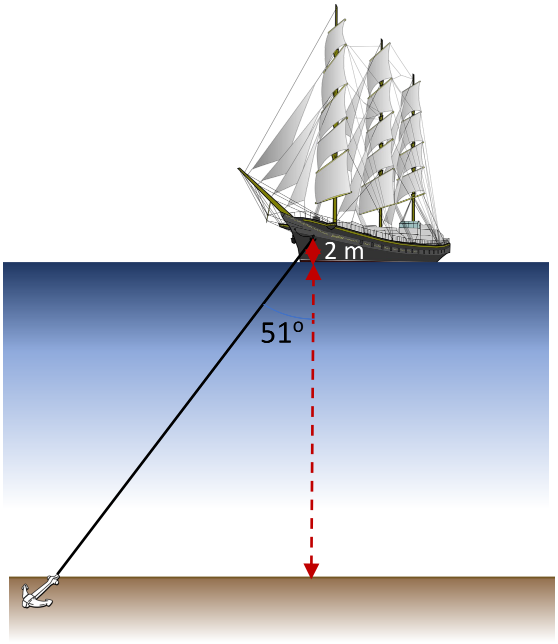
## Opgaver 14 – Trigonometri

- Havdybde

Ankerlinen er 30 m

Der er 2 m fra ankerspillet og ned til havoverfladen.

Besætningen måler vinklen på ankerlinen til 51°.




$$h = 30 * \cos(51) - 2 = 16,88$$

Hvad er havdybden på det pågældende sted?

16,88 m

# Opgaver med trigonometriske formler

## Opgaver 15 – Trigonometri

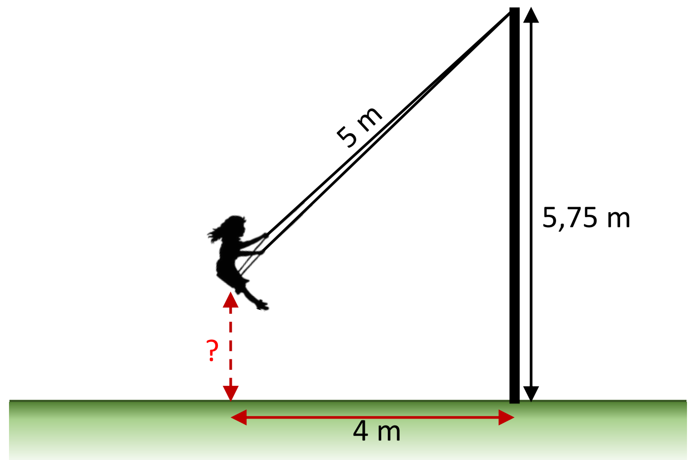
- Gynge

Gyngestativet er 5,75 m højt
Rebet, der holder gyngen, er 5 m langt.
Pigen er 4 m fra gyngestativet.

$$h = 5{,}75 - \sqrt{5^2 - 4^2} = 2{,}75\ m$$

Hvor højt over jorden gynger pigen?

2,75 m




## Opgave 16 – Trigonometri

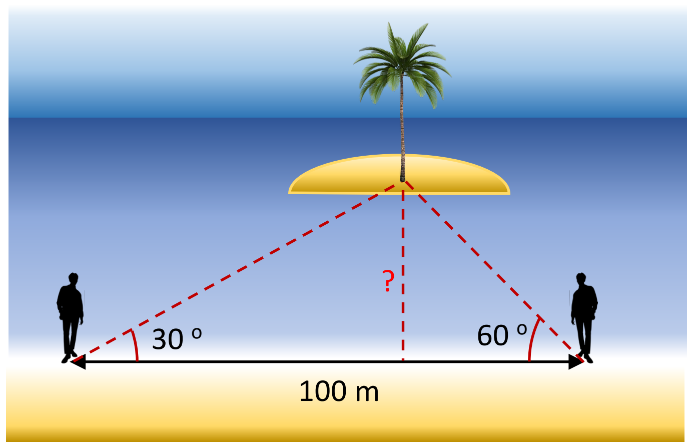
- Palmeøen

$$a = \cos(60) * 100 = 50$$

$$afstant\ til\ palme = \sin(60) * 50 = 43{,}30$$

Hvor lang er den korteste afstand fra strandkanten ud til palmeøen?

43,30 m




## Opgaver 17 – Trigonometri

- Golfspilleren

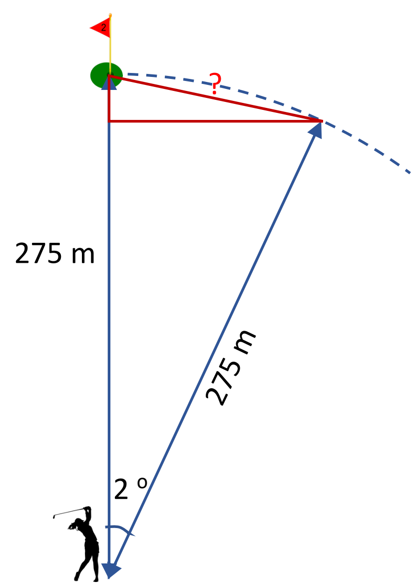
En golfspiller kan slå 275 m med sin driver.

Han fejler sit drive med 2 º

$$a = \sin(2) * 275 = 9{,}567362$$
$$b = 275 - \cos(2) * 275 = 0{,}1675226$$
$$c = \sqrt{9{,}69{,}567362^{\ 2} + 0{,}1675226^2} = 9{,}6\ m$$

Hvor langt ligger bolden fra hullet?

9,6 m

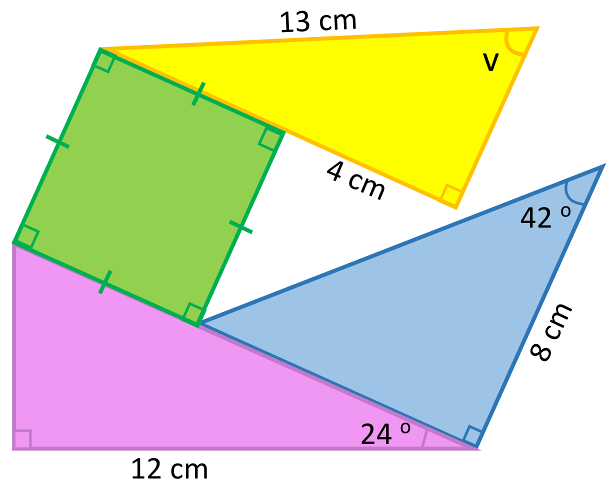


# Opgaver med trigonometriske formler

## Opgaver 18 – Trigonometri

- Sammensat figur

Find vinklen v i den øverste trekant.
Pas på med afrundinger i mellemregninger.




$$hyp = \frac{12}{\cos(24)} = 13{,}1356$$

$$Kat = 8 * \tan(42) = 7{,}2032$$

$$side = 13{,}1356 - 7{,}2032 = 5{,}9324$$

$$kat = 5{,}9324 + 4 = 9{,}9324$$

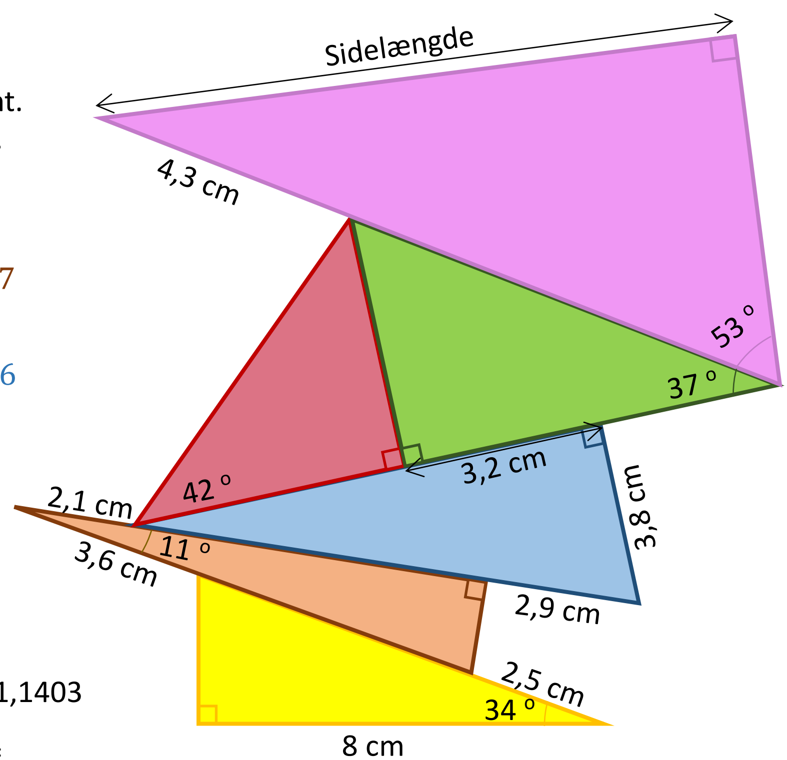
$$v = sin^{-1}\left(\frac{9{,}9324}{13}\right) = 49{,}83^o$$

V = 49,83 °

## Opgave 19 – Trigonometri

- Sammensat figur

Find sidelængden i den øverste trekant.
Pas på med afrundinger i beregninger.




$$hyp = \frac{8}{\cos(34)} = 9{,}6497$$

$$hyp = 9{,}6497 - 2{,}5 + 3{,}6 = 9{,}7497$$

$$kat = cos(11) * 9{,}7497 = 9{,}5706$$

$$hyp = 9{,}5706 - 2{,}1 + 2{,}9 = 10{,}3706$$

$$kat = \sqrt{10{,}3706^2 - 3{,}8^2} = 9{,}6493$$

$$kat = 9{,}6493 - 3{,}2 = 6{,}4493$$

$$kat = 6{,}4493 * \tan(42) = 5{,}8070$$

$$hyp = 5{,}8070/\sin(37) = 9{,}6491$$

$$hyp = 9{,}6491 + 4{,}3 = 13{,}9491$$

$$sidelængde = 13{,}9491 * \sin(53) = 11{,}1403$$

Sidelængden på den øverste trekant =

11,1403 cm